Institut für Technische Thermodynamik und Kältetechnik
Leiter: Prof. Dr.-Sabine Enders

Begleitmaterial zur Vorlesung

„Fehlerrechnung und Fehlerabschätzung bei physikalischen Messungen“

Verfasst von Dr. rer. nat. Sokratis Sinanis

November 2016

1. Fehlerrechnung und Fehlerabschätzung bei physikalischen Messungen

Die Messung einer physikalischen Größe wird charakterisiert durch:

(i) Zahlenwert
(ii) Dimension
(iii) Fehler (wobei mit „Fehler" eine Aussage über die Genauigkeit des Ergebnisses gemeint ist)

Die Fehlerangabe ist eine Wahrscheinlichkeitsaussage; Je größer das Fehlerintervall desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der physikalischen Größe innerhalb dieses Intervalls liegt.

Fehlerarten

Gemäß ihrem Ursprung unterscheidet man prinzipiell drei Arten von Fehlern:

(a) Grobe Fehler (Unachtsamkeit, falsche Bedienung der Messapparatur, falsche Auswertung usw.)

(b) Systematische Fehler.
Beeinflussen das Ergebnis unter identischen Messbedingungen stets im gleichen Sinne (äußere Einflüsse, falsche elektrische Schaltung, Alterung der Messgeräte usw.). Diese sind mathematisch nicht erfassbar.

(c) Zufällige Fehler. Die Messwerte streuen um den wahren Wert. Diese gehorchen den Gesetzen der Statistik und somit mathematisch erfassbar.

2. Verteilungsfunktion und ihre Parameter.

Eine n-malige Messung einer physikalischen Größe liefert die Messwerte $x_1, x_2, \ldots x_n$. Der wahre Wert dieser Größe ist x_W. Eine Reihe von zufälligen Einflüssen ist wirksam, so dass die gemessenen x_i von x_W abweichen. Diese können sowohl größer, als auch kleiner als x_W sein. Man kann annehmen, dass für die Messergebnisse eine Normalverteilung gilt.
Die Wahrscheinlichkeitsdichte, einen gewissen Messwert x_i zu erhalten, hat also die Form einer Gaußschen Glockenkurve. Die einzelnen Messwerte stellen eine Stichprobe dar. Je größer die Anzahl der Messungen n ist, desto besser werden sie mit der Wahrscheinlichkeitsdichte übereinstimmen. Bei endlichem n können aber immer Abweichungen von der zu erwartenden Verteilung auftreten, so dass man den wahren Wert x_W und die wahre Verteilungskurve nicht unmittelbar über die x_i bestimmen kann.

Frage 1:
Wie kann man aus den einzelnen Messungen x_i denjenigen Wert bestimmen, der mit größter Wahrscheinlichkeit dem wahren Wert x_W entspricht?

2.1 Mittlerer Fehler der Einzelmessungen

Die Abweichungen der einzelnen Messwerte x_i vom Mittelwert $\overline{x}$ nennt man die Fehler der einzelnen Messungen und bezeichnet sie mit

$$u_i = x_i - \overline{x}$$

Ein geeignetes Maß für die Größe dieser Fehler ist die so genannte Stichprobenstreuung oder Standardabweichung. Sie ist gegeben zu:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

Diese Größe bezeichnet man als den <u>mittleren Fehler einer Einzelmessung.</u> Man kann sich auch für die Abweichungen der einzelnen Messwerte vom unbekannten wahren Wert interessieren. Diese Abweichung nennt man den tatsächlichen Fehler. Obwohl der wahre Wert nicht bekannt ist, kann man eine Beziehung für die Standardabweichung bezüglich des wahren Wertes herleiten. Diese lautet:

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

<u>Frage 2:</u>

Was bedeuten die Angaben: $\overline{x} \pm \sigma,\ \overline{x} \pm 2\sigma, \overline{x} \pm 3\sigma$

<u>3. Fehlerfortpflanzung</u>

<u>3.1 Fortpflanzung des Fehlers einer Einzelmessung sowie des maximalen Fehlers</u>

Wir betrachten den Fall, dass wir zwei Größen x und y messen. Aus den gemessenen Werten berechnen wir einen neue Größe z, die eine Funktion von x und y ist:

$$z = f(x, y)$$

<u>Frage 3:</u>

Wie wirkt sich bei einer einmaligen Messung von x und y ein Fehler in x und y auf z aus?

3.2 Fortpflanzung des mittleren Fehlers

In diesem Fall werden die Größen x und y mehrmals gemessen

<u>Frage 4:</u>

Wie wirken sich die mittleren Fehler in x und y auf den mittleren Fehler in z aus?

3.3 Mittlerer Fehler des Mittelwertes

Ein Maß für die mögliche Abweichung des Mittelwertes $\overline{x}$ vom wahren Wert x_w ist der mittlere Fehler. Dieser ist keineswegs identisch mit dem mittleren Fehler σ der Einzelmessung (Warum?).

<u>Frage 5</u>:

Welcher Ausdruck ergibt sich für den mittleren Fehler des Mittelwertes für n Messungen?

4. Ausgleichsrechnung bei zwei voneinander abhängigen Messgrößen.

4.1 Rechnerische Auswertung von Messdaten

Betrachtet wird der Fall, wo zwei Größen x und y gemessen werden. Die Größen sollen voneinander gemäß:

$$y = ax + b$$

linear abhängig sein. Die einzelnen gemessenen Wertepaare werden mit $x_1y_1,\ x_2y_2,...,x_ny_n$ bezeichnet. Die Messungen sind in der folgenden Abb. 1 dargestellt.

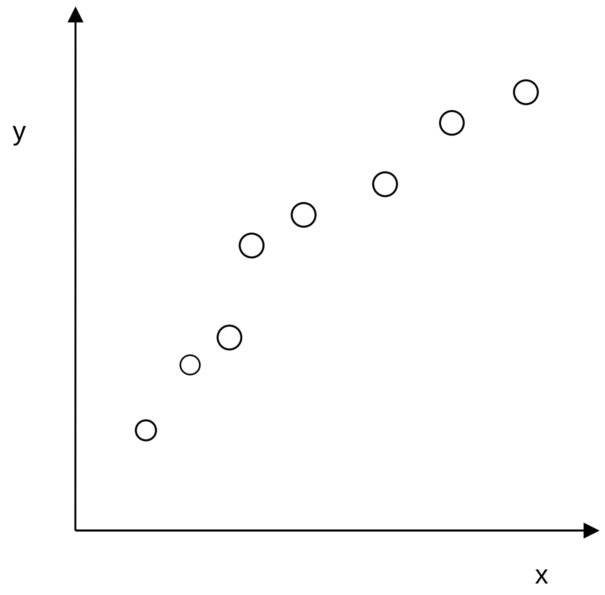

Abb. 1: Graphische Darstellung der mit Messfehler behafteten Wertepaare (x, y)

Die Punkte liegen wegen der zufälligen Fehler, welche bei den Messungen auftreten, nicht auf einer Geraden.

Frage 6:
Auf welche Weise kann man diejenige Gerade finden, die mit größter Wahrscheinlichkeit mit der tatsächlichen vorliegenden Geraden übereinstimmt?

4.2 Graphische Auswertung von Messdaten

Die graphische Darstellung (Geradenanpassung) einer Messreihe dient nicht nur dazu, eine Veranschaulichung des funktionellen Zusammenhanges zweier Messgrößen zu vermitteln, sondern kann auch zur quantitativen Auswertung verwendet werden.

Frage 7:

Wie ist eine Geradenanpassung durchzuführen für einen Datensatz (x,y) mit dem der funktionalen Zusammenhang $y = ax + b$

Die Fragen, sowie ausgewählte Beispiele werden in der Vorlesung behandelt.

Literatur:

- Zachmann, Jüngel, Mathematik für Chemiker, Wiley-Verlag 2007
- Gerthsen, Kneser, Vogel, Physik, Springer Verlag, 1986
- Weltner, Mathematik für Physiker, Vieweg-Verlag, 1988
- Finke, Versuchsanleitungen zum Anfängerpraktikum, Fachbereich Physik, Uni- Dortmund, 1990